المتتاليات العددية الأستاذ محمد الرقبة

I- تمهيـــد :

اشترى عصام سيارة بـ 40.000 درهم وبعد مرور سنة أصبح ثمنها هو ¾ ثمن الشراء ، وبعد مرور سنة أخرى أصبح ثمنها هو ¾ من ثمنها السنة الأولى وهكذا يكون ثمن السيارة في سنة معينة هـو ¾ من ثمنها في السنة السابقة.

1- حدد ثمن السيارة بعد مرور ثلاث سنوات.
2- حدد ثمن السيارة بعد مرور أربع سنوات.
3- حدد ثمن السيارة بعد مرور n سنة بدلالة n.
4- في أية سنة يصبح ثمن السيارة أقل من 15.000 درهم ؟

الجـــواب :

-1

$$P_1 = \frac{3}{4} P_0 = \frac{3}{4} \cdot 40.000$$
$$= 30.000$$

$$P_2 = \frac{3}{4} P_1 = \frac{3}{4} \cdot 30.000$$
$$= \frac{90.000}{4} = 22.500$$

$$P_3 = \frac{3}{4} P_2 = \frac{3}{4} \cdot 22.500$$
$$= 16.875$$

$$P_4 = \frac{3}{4} P_3 = \frac{3}{4} \cdot 16.875$$ **-2**
$$= 12.656,25$$

-3

$$X \begin{cases} P_1 = \frac{3}{4} P_0 \\ P_2 = \frac{3}{4} P_1 \\ P_3 = \frac{3}{4} P_2 \\ P_4 = \frac{3}{4} P_3 \\ \vdots \\ P_n = \frac{3}{4} P_{n-1} \end{cases}$$

www.0e1.com

إذن :

$$P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot P_4 \ldots P_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot P_0 \cdot P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot P_4 \ldots P_{n-1}$$

إذن : $$P_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot P_0$$

4- لنحل في $\mathbb{N}$ المتراجحة :

$$P_n \leq 15.000$$

$$P_n \leq 15.000 \Leftrightarrow P_0 \left(\frac{3}{4}\right)^n \leq 15.000$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^n \leq \frac{15.000}{40.000}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^n \leq \frac{3}{8}$$

من أجل $n \geq 4$ ثمن السيارة يصبح أقل من **15.000** .

خلاصة :

الأعداد P_0 ، P_1 ، P_2 ... P_n تكون متتالية عددية.

II- تعاريف ومصطلحات :

1- تعريف :

ليكن I جزءا من $\mathbb{N}$ $(I \in \mathbb{N})$.

كل تطبيق من I نحو $\mathbb{R}$:

$$u : I \to \mathbb{R}$$
$$n \to u(n)$$

يسمى متتالية عددية .

نكتب u_n عوض $u(n)$.

ونرمز لهاته المتتالية بـ : $(u_n)_{n\in I}$

عادة تكون $I = \mathbb{N}$ أو $I = \mathbb{N}^*$

العدد u_n يسمى الحد العام للمتتالية $(u_n)_{n\in I}$

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n)_{n\geq 0} = (u_n)$$

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (u_n)_{n\geq 1} = (u_n)_{n>0}$$

u_n هو الحد ذا المدل n.

أمثلة :

حدد الحدود الأولى للمتتالية المعرفة بما يلي :

www.0et1.com

$I = \mathbb{N}$ $\qquad$ $u_n = 2n - 1$

$u_0 = -1$

$u_1 = 1$

$u_2 = 3$

2- تساوي متتاليتين :

نعتبر المتتاليتين :

$(u_n)_{n\in I}$; $(v_n)_{n\in J}$

$$(u_n)_{n\in I} = (v_n)_{n\in J} \Leftrightarrow \begin{cases} I = J \\ \forall n \in I \ ; \ u_n = v_n \end{cases}$$

مثـــال :

$u_n = (-1)^n$ $\qquad$ $v_n = \cos n\pi$

لدينا : $\forall n \in \mathbb{N}$; $(-1)^n = \cos n\pi$

إذن : $(u_n) = (v_n)$

III- تحديـد متتاليـــة :

1- المتتاليـة المعرفـة بصيغـة صريحـة لحـدها العـام :

لتكن f دالة عددية $(u_n)_{n\in I}$ متتالية عددية .

إذا كان : $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n = f(n)$

المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ هـي متتالية معرفة بصيغـة صريحـة لحـدها العـام .

2- المتتاليـة الترجعيـــة :

المتتالية الترجعية هي كل متتالية يكون كل حد من حدودها معرفا بواسطة الحد (أو الحدود) السابقة.

مثـــال :

$u_0 = 2$

$\forall n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n + 1}$

أحسب u_3.

$$u_1 = \frac{1}{u_0 + 1} = \frac{1}{3}$$

$$u_2 = \frac{1}{u_1 + 1} = \frac{3}{4}$$

$$u_3 = \frac{1}{u_2 + 1} = \frac{4}{7}$$

www.etl.co

IV- المتتـاليــة المحــدودة Suite bornée

1- المتتالية المكبورة Suite majorée

نقول أن المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ مكبورة ، إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي M حيث :

$$\forall n \in I \qquad u_n \leq M$$

أمثلـة :

- $n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad u_n = \frac{1}{n}$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad u_n \leq 1$$

المتتالية المصغورة Suite minorée

نقول أن المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ مصغورة ، إذا وفقط إذا وجد m حيث :

$$\forall n \in I \qquad m \leq u_n$$

أمثلـة :

- $n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad u_n = \frac{1}{n}$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad 0 \leq u_n$$

2- المتتالية المحـدودة :

نقول أن المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ محـدودة ، إذا وفقط إذا كانت مكبورة ومصغورة.

مثـال :

$$u_n = \frac{n^2-1}{n^2+1}$$

لدينا : $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad n^2-1 \leq n^2+1$

إذن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad \frac{n^2-1}{n^2+1} \leq 1$

أي : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \leq 1$

بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad -1 \leq u_n$

لدينا :

$\forall n \in \mathbb{N} \qquad -n^2 \leq n^2$

$\forall n \in \mathbb{N} \qquad -n^2-1 \leq n^2-1$

$\forall n \in \mathbb{N} \qquad -1 \leq \frac{n^2-1}{n^2+1}$

إذن : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad -1 \leq u_n$

www.defi.com

ومنه : $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad -1 \leq u_n \leq 1$

إذن : (u_n) متتالية محـدودة.

V- المتتـاليــة الـرتيبــة Suite monotone

تعـاريف :

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$

- نقول أن المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ تزايديـة قطعـا إذا وفقط إذا كان :

$$\forall n \geq n_0 \quad ; \quad u_{n+1} \succ u_n$$

- نقول أن المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ تناقصية قطعـا إذا وفقط إذا كان :

$$\forall n \geq n_0 \quad ; \quad u_{n+1} \prec u_n$$

- نقول أن المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ رتيبــة إذا وفقط إذا كانت تزايدية أو تناقصية.

حـالات خاصــة :

a) لتكن f دالة عددية حيز تعريفها D و $(I \in D)$.

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ المعرفة بـــ : $\forall n \in I \quad ; \quad u_n = f(n)$

لدينا : $\forall n \in I \quad ; \quad u_{n+1} - u_n = f(n+1) - f(n)$

إذا كانت f تزايديـة قطعـا فإن $(u_n)_{n\in I}$ تزايديـة قطعـا.

إذا كانت f تناقصيـة قطعـا فإن $(u_n)_{n\in I}$ تناقصيـة قطعـا.

مـثــال :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـــ :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n = \frac{2n^2 + 1}{n^2 + 5}$$

أدرس رتابة المتتالية (u_n).

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 5}$$

لدينا : f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$.

وبالتالية : المتتالية (u_n) تزايدية قطعـا.

(b $\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = 2n + \sin n$

لدينا : $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \quad u_{n+1} - u_n = 2(n+1) + \sin(n+1) - [2n + \sin n]$

$= \cancel{2n} + 2 + \sin(n+1) - \cancel{2n} - \sin n$

$= \sin(n+1) - \sin n + 2$

لدينا : $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \quad -1 \leq \sin(n+1) \leq 1$

و : $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \quad -1 \leq \sin n \leq 1$

إذن : $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \quad -1 \leq -\sin n \leq 1$

ومنه : $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \quad -2 \leq \sin(n+1) - \sin n \leq 2$

إذن : $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \quad 0 \leq \sin(n+1) - \sin n + 2 \leq 4$

إذن : $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \quad u_{n+1} - u_n \geq 0$

ومنه : (u_n) **متتالية تزايدية.**

(c لتكن $(u_n)_{n \in I}$ متتالية موجبة قطعا.

(يعني أن : $\forall n \in I \qquad (u_n \succ 0)$)

- إذا كان لكل n من I : $1 \leq \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

فإن $(u_n)_{n \in I}$ تزايدية.

- إذا كان لكل n من I : $0 \prec \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$

فإن $(u_n)_{n \in I}$ تناقصية.

مثـــال :

$3 \leq n \; ; \qquad u_n = \dfrac{2^n}{n^2}$

بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 3}$ تزايديـة.

- **(طريقـة 1)**

لدينا: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{\dfrac{2^{(n+1)}}{(n+1)^2}}{\dfrac{2^n}{n^2}} \geq 1$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2^{(n+1)}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{2^n} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \geq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{n}{n+1} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\, n \geq n+1$$

$$\Leftrightarrow \quad n\left(\sqrt{2}-1\right) \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad n\left(2-1\right) \geq \sqrt{2}+1$$

$$\Leftrightarrow \quad n \geq \sqrt{2}+1$$

وبما أن : $n \geq 3$

فإن : $\forall n \geq 3 \; ; \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$

ومنه : $(u_n)_{n\geq 3}$ **متتالية تزايديــة.**

- **(<u>طريقــة 2</u>)**

$$n \geq 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} \leq \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4}{3} \geq 1 + \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4}{3} \geq \frac{n+1}{n}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{4} \leq \frac{n}{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{9}{16} \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{18}{16} \leq 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad 1 \leq 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^2$$

www.0et1.com

ومنه : $1 \leq \frac{u_{n+1}}{u_n}$

وبالتالي $(u_n)_{n\geq 3}$ تزايديـة.

d) تقنيـة البرهـان بالترجـع.

مثـــال :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ :

$$\begin{cases} u_0 = 16 \\ \forall n \in \mathbb{N} \; ; \; u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}$$

بين أن : (u_n) تناقصيـة.

الجـواب :

لنبين أن : $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; u_{n+1} \leq u_n$

- من أجل : $n = 0$ ، $u_1 = 4$ و $u_0 = 16$

إذن : $u_1 \leq u_0$

نفترض أن : $u_{n+1} \leq u_n$

- لنبين أن : $u_{n+2} \leq u_{n+1}$

لدينا : $u_{n+1} \leq u_n$

إذن : $\sqrt{u_{n+1}} \leq \sqrt{u_n}$

إذن : $u_{n+2} \leq u_{n+1}$

- الاستنتـاج : $u_{n+1} \leq u_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

ومنه : (u_n) تناقصيـة.

تطبيـــق :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n} \end{cases} ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) بين أن : لكل n من $\mathbb{N}$: $0 \leq u_n \leq 3$

2) أدرس رتابة (u_n).

الجـواب :

www.0et1.com

1) لنبين أن : $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \quad 0 \leq u_n \leq 3$

من أجل $n = 0$ لدينا : $u_0 = 0$ إذن : $0 \leq u_n \leq 3$

لنفترض أن : $0 \leq u_n \leq 3$ ولنبين أن : $0 \leq u_{n+1} \leq 3$

لدينا : $0 \leq u_n \leq 3$

إذن : $6 \leq u_n + 6 \leq 9$

إذن : $\sqrt{6} \leq \sqrt{u_n + 6} \leq 3$

وبما أن : $0 \leq \sqrt{6}$

إذن : $0 \leq \sqrt{6 + u_n} \leq 3$

إذن : $0 \leq u_{n+1} \leq 3$

وبالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \quad 0 \leq u_n \leq 3$

2) لنبين أن : (u_n) تزايديــة .

يكفي أن نبين أن : $u_{n+1} \geq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- من أجل $n = 0$ $u_1 = \sqrt{6}$

و : $u_0 = 0$

إذن : $u_1 \geq u_0$

نفترض أن : $u_{n+1} \geq u_n$

ولنبين أن : $u_{n+2} \geq u_{n+1}$

لدينا : $u_{n+1} \geq u_n$

إذن : $6 + u_{n+1} \geq 6 + u_n$

أي : $\sqrt{6 + u_{n+1}} \geq \sqrt{6 + u_n}$

إذن : $u_{n+2} \geq u_{n+1}$

وبالتالي : $u_{n+1} \geq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ومنه : (u_n) متتالية تزايديــة .

طريقــة 2 :

لدينا : $u_{n+1} - u_n = \sqrt{6 + u_n} - u_n$

$$= \frac{6 + u_n - u_n^2}{\sqrt{6 + u_n} - u_n}$$

www.0e1.com

إذن إشارة $u_{n+1} - u_n$ هـي إشـارة $-u_n^2 + u_n + 6$.

لندرس إشارة $-u_n^2 + u_n + 6$

لندرس إشارة $-x^2 + x + 6$

$$\Delta = 25$$

إذن : $x_2 = \dfrac{-1+5}{-2}$ **و** $x_1 = \dfrac{-1-5}{-2}$

$= -2$ **و** $= 3$

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$-x^2 + x + 6$		$-$	0	$+$	0	$-$	

وبما أن : $0 \le u_n \le 3 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$

فإن : $-u_n^2 + u_n + 6 \ge 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ومنه : $u_{n+1} - u_n \ge 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

وبالتالي : (u_n) **متتالية تزايديـة .**

تمرين تطبيقـي :

لتكن المتتالية العددية المعرفة بـ :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \; ; \; u_{n+1} = u_n (1 + u_n) \end{cases}$$

-1 أحسب u_1 و u_2.

-2 بين أن المتتالية (u_n) تزايدية.

ثم استنتج أن $u_n \ge 1 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$

-3 بين أن : $u_n^2 \ge u_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ثم أن : $u_{n+1} \ge 2\, u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

-4 واستنتج أن : $u_n \ge 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

الجـواب :

-1

$$u_1 = u_0 (1 + u_0) = 2$$
$$u_2 = u_1 (1 + u_1) = 6$$

-2 لدينا :

$$\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; u_{n+1} - u_n = u_n (1 + u_n) - u_n$$
$$= \cancel{u_n} + u_n^2 - \cancel{u_n}$$
$$= u_n^2$$

وبما أن : $u_n^2 \ge 0$

www.0et1.com

ومنه فإن : (u_n) تزايدية.

وبما أن : $u_0 = 1$ و (u_n) تزايديـة.

فإن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 1$

3- لدينا : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 1$

إذن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n^2 \geq u_n$

ومنه : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n^2 + u_n \geq 2\,u_n$

إذن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \geq 2\,u_n$

4- لدينا : $u_1 \geq 2\,u_0$

$u_2 \geq 2\,u_1$

$u_3 \geq 2\,u_2$

ومنه : $u_n \geq 2\,u_{n-1}$

ومنه : $u_1 \cdot u_2 \ldots u_n \geq 2^n \cdot u_0 \cdot u_1 \ldots u_{n-1}$

إذن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 2^n\,u_0$

وبما أن : $u_0 = 1$

فإن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 2^n$

VI- المتتاليات الحسابية ، المتتاليات الهندسية :

Suites géométriques, Suites arithmétique

1- المتتاليات الحسابية :

a- تضنن الحد العام للمتتالية التالية :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad ; \quad u_1 = \frac{5}{6} \quad ; \quad u_2 = \frac{7}{6} \quad ; \quad u_3 = \frac{3}{2}$$

لدينا :

$$X \begin{cases} u_1 = u_0 + \frac{1}{3} \\ u_2 = u_1 + \frac{1}{3} \\ u_3 = u_2 + \frac{1}{3} \\ u_4 = u_3 + \frac{1}{3} \\ \vdots \\ u_n = u_{n-1} + \frac{1}{3} \end{cases}$$

www.9et1.com

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots u_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots u_{n-1} + \frac{1}{3} n$$

إذن :
$$u_n = u_0 + \frac{1}{3} n$$

ومنه :
$$u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

هذه المتتالية تسمى متتالية حسابية.

b- تعريف :

تكون المتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ حسابية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي r ،

بحيث : $u_{n+1} - u_n = r \qquad \forall n \geq n_0$

العدد r يسمى أساس المتتالية الحسابية $(u_n)_{n \geq n_0}$

مثال :

$$u_n = \frac{2n + 1}{3}$$

بين أن : (u_n) متتالية حسابية وحدد أساسها.

لدينا :
$$\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1) + 1}{3} - \frac{2n + 1}{3}$$
$$= \frac{2n + 2 + 1 - 2n - 1}{3}$$
$$= \frac{2}{3}$$

ومنه : (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = \frac{2}{3}$.

c- خاصية مميزة :

تمهيد :

لتكن $(u_n)_{n \succ n_0}$ متتالية حسابية أساسها r.

لدينا :
$$u_n = u_{n-1} + r$$
$$u_{n+1} = u_n + r$$

إذن :
$$u_n - u_{n-1} = u_{n+1} - u_n$$

إذن :
$$2u_n = u_{n-1} + u_{n+1}$$

إذن :
$$u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$$

خاصية مميزة :

u_n متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان :
$$\forall n \geq 1 \qquad u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$$

www.0et.com

d- صيغة الحد العام لمتتالية حسابيـة :

لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_0.

$$X \quad \begin{cases} u_1 = u_0 + r \\ u_2 = u_1 + r \\ \vdots \\ u_{n-1} = u_{n-2} + r \\ u_n = u_{n-1} + r \end{cases}$$

$$u_n = u_0 + n\,r$$

خاصيـة :

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_0

فإن : $\forall n \in \mathbb{N}\ ;\quad u_n = u_0 + n\,r$

استنتـاج :

لدينا : $u_n = u_0 + n\,r$

$$u_n = u_0 + r + (n-1)\,r$$

$$u_n = u_1 + (n-1)\,r$$

$$u_n = u_1 + r + (n-2)\,r$$

$$u_n = u_2 + (n-2)\,r$$

ومنه : $u_n = u_k + (n-k)\,r$

خاصيـة :

إذا كانت a ، b و c ثلاث حدود متتابعة لمتتالية حسابية ،

فإن : $a + c = 2\,b$

e- مجموع حدود متتابعـة لمتتاليـة حسابيـة :

لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_0

لنحسب المجموع S حيث :

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

$$\Rightarrow\ S = u_0 + (u_0 + r) + (u_0 + 2r) + (u_0 + 3r) + \ldots + (u_0 + nr)$$

$$\Rightarrow\ S = (n+1)\,u_0 + r\,(1 + 2 + 3 + \ldots + n)$$

www.Oel.com

لنحسب :

$$X = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

$$X = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1$$

$$2X = \underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1)}_{n \text{ من العوامـل}}$$

إذن :

$$\Rightarrow \quad 2X = n(n+1)$$

$$\Rightarrow \quad X = \frac{n(n+1)}{2}$$

ومنه :

$$S = (n+1)u_0 + r\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow \quad S = (n+1)\left(u_0 + \frac{rn}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad S = (n+1)\frac{2u_0 + nr}{2}$$

$$\Rightarrow \quad S = (n+1)\frac{u_0 + u_0 + nr}{2}$$

$$\Rightarrow \quad S = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}$$

وبالتالي :

عدد الحدود — الحد الأول — الحد الأخير

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}$$

بنفس الطريقة نحصل على :

- $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = n\frac{u_1 + u_n}{2}$
- $u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} = n\frac{u_0 + u_{n-1}}{2}$
- $u_3 + u_4 + \ldots + u_9 = 7\frac{u_3 + u_9}{2}$

تطبيـق 1 :

أحسب u_0 وأساس المتتالية الحسابية (u_n) إذا علمت أن :

$$\begin{cases} u_4 + u_6 = 6 \\ u_8 + u_{10} + u_{12} + u_{14} = 228 \end{cases}$$

لدينا :

$$2u_5 = 6$$

www.net1.com

$$u_5 = 3$$

ولدينا :

$$u_9 + u_{13} = 114$$

$$(u_5 + 4r) + (u_5 + 8r) = 114$$

إذن :

$$6 + 12r = 114$$

$$r = \frac{108}{12} = 9$$

ولدينا :

$$u_5 = u_0 + 5r$$

إذن :

$$3 = u_0 + 45$$

$$u_0 = -42$$

تطبيق 2 :

$(u_n)_{n>0}$ متتالية حسابية.

$$S_n = u_1 + \ldots\ldots\ldots + u_n$$

أحسب n و S_n إذا كانت $u_1 = 23$ و $u_n = 5$ و $r = -2$

الجواب :

لدينا :

$$u_n = u_1 + (n-1)r$$

$$5 = 23 + (n-1)(-2)$$

$$2n = 18 + 2$$

$$n = 10$$

إذن :

$$S_n = S_{10} = u_1 + \ldots + u_{10} = 10 \cdot \frac{u_1 + u_{10}}{2} = 140$$

2- المتتاليات الهندسية :

2-1 : تمهيد :

تضمن الحد العام للمتتالية (u_n).

إذا علمت أن :

$$u_0 = 2 \quad , \quad u_1 = \sqrt{2^3} \quad , \quad u_2 = 4 \quad , \quad u_3 = \sqrt{32} \quad , \quad \ldots.$$

نلاحظ أن :

$$u_1 = u_0 \cdot \sqrt{2}$$

$$u_2 = u_1 \cdot \sqrt{2}$$

$$u_3 = u_2 \cdot \sqrt{2}$$

ومنه :

$$u_{n+1} = \sqrt{2} \cdot u_n$$

www.0et1.com

لدينا :

$$X \quad \begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \cdot u_0 \\ u_2 = \sqrt{2} \cdot u_1 \\ u_3 = \sqrt{2} \cdot u_2 \\ \vdots \\ u_n = \sqrt{2} \cdot u_{n-1} \end{cases}$$

$$\boxed{u_n = u_0 \cdot \sqrt{2}^n}$$

$$n \in \mathbb{N} \; ; \quad u_n = 2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^n$$

هـذه المتتاليـة متتاليـة هندسيـة.

2-2 : تعريـف :

تكون المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ هنـدسيـة إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي q ،

حيث : $\forall n \geq n_0 \qquad u_{n+1} = q\, u_n$

- العدد q يسمى أساس المتتالية الهندسية $(u_n)_{n\geq n_0}$.
- العدد q غير مرتبط بـ n.
- العدد q غير منعدم.

خاصيـة مميـزة :

تمهيـد : لتكن $(v_n)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q.

$$\forall n \succ n_0$$

لدينا :

$$v_n = q \cdot v_{n-1}$$

$$v_{n+1} = q \cdot v_n$$

إذن :

$$\frac{v_n}{v_{n-1}} = \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

$$\boxed{v_n^2 = v_{n-1} \cdot v_{n+1}}$$

خاصيـة مميـزة :

تكون $(v_n)_{n\geq n_0}$ متتاليـة هندسيـة إذا وفقط إذا كـان :

$$\forall n \succ n_0 \qquad v_{n+1} \cdot v_{n-1} = v_n^2$$

www.c...com

3-2 : صيغة الحد العام لمتتالية هندسية :

لتكن (v_n) متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول v_0.

لدينا :

$$X \quad \begin{cases} v_1 = q \cdot v_0 \\ v_2 = q \cdot v_1 \\ v_3 = q \cdot v_2 \\ \vdots \\ v_n = q \cdot v_{n-1} \end{cases}$$

نحصل على : $v_n = v_0 \cdot q^n$

استنتاج وخاصية :

إذا كانت (v_n) متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول v_0 ،

فإن : $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \quad v_n = v_0 \cdot q^n$

لدينا : $v_n = v_0 \cdot q^n$

إذن : $v_n = v_0 \cdot q \cdot q^{n-1}$

إذن : $v_n = v_1 \cdot q^{n-1}$

ولدينا : $v_n = v_1 \cdot q \cdot q^{n-2}$

إذن : $v_n = v_2 \cdot q^{n-2}$

بصفة عامة :

$$v_n = v_k \cdot q^{n-k}$$

4-2 : مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية :

لتكن (v_n) متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول v_1.

لنحسب المجموع $S = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots\ldots\ldots + v_n$

لدينا :

$$S = v_0 + v_0 q + v_0 q^2 + \ldots\ldots\ldots + v_0 q^n$$

$$= v_0 \left(1 + q + q^2 + \ldots\ldots\ldots + q^n\right)$$

لنحسب المجموع : $X = 1 + q + q^2 + \ldots\ldots\ldots + q^n$

لدينا :

$$q X = q + q^2 + q^3 + \ldots\ldots\ldots + q^n + q^{n+1}$$

$$X = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots\ldots\ldots + q^n$$

www.Ostl.com

إذن :

$$X - qX = 1 - q^{n+1}$$

$$X(1-q) = 1 - q^{n+1}$$

إذن :

$$X = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

ومنه :

$$1 + q + q^2 + \ldots\ldots\ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

إذن :

$$S = v_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

(v_0 : الحد الأول ، q : الأساس ، $n+1$: عدد الحدود)

$$v_0 + v_1 + v_2 + \ldots\ldots\ldots + v_n = v_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots\ldots\ldots + v_n = v_1 \cdot \frac{1-q^{n}}{1-q}$$

$$v_0 + v_1 + \ldots\ldots\ldots + v_{n-1} = v_0 \cdot \frac{1-q^{n}}{1-q}$$

تمريـن تطبيقـي :

$n \prec m$

1) أحسب المجموع : $S_n = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{2^m}$

2) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\succ 0}$ بحيث حدودها العشرة الأولى هـي حدود متتالية حسابية أساسها r.

وابتداءا من u_{10} تصبح الحدود حدود متتالية هندسية أساسها q علما أن :

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{16} = \frac{-1}{27} \\ r\,q = 1 \end{cases}$$

a) أحسب q و r و u_{10} و u_{11}.

b) أحسب : $S_n = \sum_{p=1}^{n} u_p$

في كل من الحالتين :

* $n \leq 10$
* $n \succ 10$

الجـواب :

www.0et1.com

1) **طريقـة 1 :**

$2 \prec m$

$$S_n = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{2^m}$$

$$S_n = \frac{1}{2^n} \; \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{m-n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{m-n+1}\right)$$

طريقـة 2 :

$$S_n = \frac{1}{2^n}\left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots\ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{m-n}\right)$$

$$= \frac{1}{2^n}\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{m-n+1}}{1 - \frac{1}{2}}\right)$$

2)

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{16} = \frac{-1}{27} \\ r\,q = 1 \end{cases}$$

a) لدينا : $u_{16} = u_{10} \cdot q^6$

و : $u_{10} = u_1 \cdot 9\,r = 9\,r$

إذن : $u_{16} = 9\,r \cdot q^6$

$u_{16} = 9\,q^6$

(لأن : $r\,q = 1$)

إذن : $\frac{-1}{27} = 9\,q^5$

إذن : $q^5 = \frac{-1}{27 \cdot 9}$

$q^5 = \frac{-1}{3^5}$

إذن : $q^5 = \left(\frac{-1}{3}\right)^5$

$q = \frac{-1}{3}$

ومنه : $r = -3$

www.0et1.com

$u_{10} = -27$: و

$u_{11} = 9$: و

b) لنحسب : $S_n = \sum_{p=1}^{n} u_p$

* في الحالة : $n \leq 10$

$$S_n = n \frac{u_1 + u_n}{2}$$

$$= n \frac{u_1 + u_1 + (n-1)r}{2}$$

$$S_n = n \frac{-3n(n-1)}{2}$$

* في الحالة : $n \succ 10$

$$S_n = S_1 + \ldots\ldots + u_9 + u_{10} + u_{11} + \ldots\ldots + u_n$$

$$S_n = S_{10} + (u_{11} + \ldots\ldots + u_n)$$

$$S_n = S_{10} + \left(u_{11} \frac{1 - q^{(n-10)}}{1 - q}\right)$$

www.0et1.com